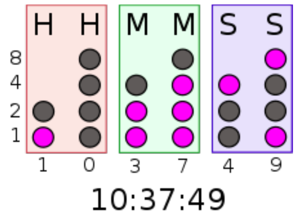
WIKIPEDIA

Stellenwertsystem

Ein **Stellenwertsystem**, **Positionssystem** oder **polyadisches Zahlensystem** ist ein Zahlensystem, bei dem die (additive) Wertigkeit eines Symbols von seiner Position, der **Stelle**, abhängt. Beispielsweise besitzen im weitverbreiteten Zehnersystem für den Beispiels-Wert „127“ die Ziffer „1“ den Wert 1 · 100, dazu addiert sich für die Ziffer „2“ der Wert 2 · 10 sowie für die „7“ 7 · 1 – die Symbole „1“, „2“ und „7“ besitzen eine Wertigkeit, die davon abhängt, an welcher Position/Stelle sie in der Zahl stehen. Unter der Annahme eines endlichen Vorrats an Symbolen (meist Ziffern oder Zahlzeichen genannt, im Beispiel „0“..„9“) hängt die Anzahl der erforderlichen Stellen logarithmisch von der Größe der dargestellten Zahl ab – im Unterschied zu Additionssystemen, bei denen dieser Zusammenhang (asymptotisch, d. h. für ganz große Zahlen) linear ist.

Die Größe b des Ziffernvorrats spielt eine entscheidende Rolle. Im Zehnersystem-Beispiel ist der Ziffernvorrat „0“ bis „9“, das sind $b = 10$ verschiedene Symbole. Bei den wichtigen ganzzahligen Systemen ist der Wert der dargestellten Zahl gleich die Summe der Produkte des jeweiligen Ziffernwerts mit seinem **Stellenwert**, also ein Polynom in b mit den Werten der Ziffern als Koeffizienten; im Beispiel: Zahlenwert = „1“ · 10^2 + „2“ · 10^1 + „7“ · 10^0. Deshalb wird b als *Basis* oder *Grundzahl* des Systems bezeichnet. Die Darstellung von Zahlen bezüglich einer Basis b wird oft auch ihre **b-adische Darstellung** (nicht zu verwechseln mit p-adischen Zahlen) genannt. Jede ganze Zahl $b \geq 2$ eignet sich als Basis für ein Stellenwertsystem.[1]

Beispiele für Stellenwertsysteme sind das im Alltag gewöhnlich gebrauchte Dezimalsystem (*dek*adisches System mit der Basis 10), das in der Datenverarbeitung häufig verwendete Dualsystem (*dy*adisches System mit der Basis 2), das Oktalsystem (mit der Basis 8), das Hexadezimalsystem (mit der Basis 16) sowie das Sexagesimalsystem (mit der Basis 60). Ein Beispiel für ein Zahlensystem, das *kein* Stellenwertsystem ist, ist das der römischen Ziffern. Es handelt sich dabei um ein Additionssystem.



Eine binäre Uhr kann Leuchtdioden benutzen, um binäre Werte darzustellen. Im obigen Bild ist jede Spalte von Leuchtdioden eine BCD-Codierung der traditionell sexagesimalen Zeitdarstellung.

Inhaltsverzeichnis

Geschichte

Das System stammt ursprünglich aus Indien. Adam Ries verbreitete mit seinen Werken das schriftliche Rechnen mit dem Stellenwertsystem im deutschsprachigen Raum.

Grundbegriffe

In einem Stellenwertsystem werden Zahlen mit Hilfe von Ziffern und gegebenenfalls Vorzeichen oder Trennzeichen dargestellt. Der Wert einer Zahl ergibt sich anhand der Anordnung der Ziffern aus deren Ziffernwerten und Stellenwerten.

Basis

Die Anzahl der insgesamt vorhandenen Ziffern wird *Basis* b des Stellenwertsystems genannt. Ein Stellenwertsystem mit der Basis b nennt man auch b*-adisches Zahlensystem*. Die gängigsten Basen sind:[2]

- $b = 2$: das in der Digitaltechnik verwendete Dualsystem
- $b = 10$: unser vertrautes Dezimalsystem
- $b = 16$: das in der Datenverarbeitung wichtige Hexadezimalsystem.

Zu weiteren in der Praxis verwendeten b-adischen Zahlensystemen siehe den Abschnitt Gebräuchliche Basen.

Ziffernvorrat

Bei einem Stellenwertsystem wird ein Ziffernsystem mit genau b verschiedenen Ziffern verwendet. Bei den verbreitetsten Ziffernsystemen steht eine Ziffer der unten angegebenen Art für einen ganzzahligen Ziffernwert $\in \{0, 1, \ldots, b-1\}$.[3][4] Beim Hochzählen (das entspricht der Addition einer Eins) wird in der festgelegten Reihenfolge zur Ziffer mit dem nächsthöheren Wert übergegangen; bei den wenigen vorhandenen Ziffern wären aber nur wenige Zählschritte möglich. Deshalb wird bei der höchstwertigen Ziffer durch Addition einer Eins auf die niedrigstwertige Ziffer übergegangen und auf der nächsthöheren Stelle eine Eins addiert. Bei einem Übertrag auf eine nicht besetzte Stelle wird diese vorab mit einer Null besetzt; bei einer nicht begrenzten Anzahl von Stellen lässt sich dadurch das Zählen unbeschränkt fortsetzen.

In den gängigen Zahlensystemen werden folgende Ziffern verwendet und ihnen ein *Ziffernwert* zugewiesen (zur besseren Unterscheidung werden hier Ziffersymbole fett und ihre zugehörigen Werte normal gedruckt):

- Im Dualsystem werden die beiden Ziffern **0** und **1** verwendet und ihnen jeweils die Werte der Zahlen 0 und 1 zugeordnet.
- Im Dezimalsystem werden die zehn Ziffern **0**, **1**, **2**, **3**, **4**, **5**, **6**, **7**, **8** und **9** verwendet und ihnen jeweils die Werte der Zahlen von 0 bis 9 in der konventionellen Reihenfolge zugeordnet.
- Im Hexadezimalsystem werden die sechzehn Ziffern **0**, **1**, **2**, **3**, **4**, **5**, **6**, **7**, **8**, **9**, **A**, **B**, **C**, **D**, **E** und **F** verwendet und ihnen jeweils die Werte der Dezimalzahlen von 0 bis 15 zugeordnet.

Ist die Basis sehr groß, kommt es meistens zu einer Kombination weniger Ziffern in einem weiteren Zahlensystem. So ist es beim Sexagesimalsystem üblich, statt 60 verschiedenen Zeichen eine Dezimalzahl von 0 bis 59 als „Ziffer" zu benutzen. IP-Adressen im IPv4-Format bestehen aus 4 „Ziffern", die Werte von 0 bis 255 annehmen können und mit einem Punkt getrennt werden, beispielsweise 192.0.2.42. Eine andere Art der Zuordnung von Ziffer zu Ziffernwert wurde bei der Codierung Base64 gewählt.

Mitunter werden anstatt Ziffern auch andere Symbole verwendet; beispielsweise werden in der Elektronik oft die beiden Zustände eines Dualsystems nicht mit **0** und **1** beschrieben, sondern es werden stattdessen **h** und **l** (für „high"- und „low"-Spannungswerte) verwendet (selten **o** und **l** für „on" und „low").

Stelle und Stellenwert

Der Wert einer Zahl ergibt sich nun durch die Anordnung der Ziffern in einer Ziffernfolge. Jeder Platz, den eine Ziffer in dieser Anordnung einnimmt oder einnehmen soll, ist eine *Stelle*.[3] Jeder Stelle wird ein *Stellenwert* zugewiesen, der einer Potenz der Basis entspricht. Die Stelle mit dem niedrigsten Stellenwert steht dabei ganz rechts.[5] Im Dezimalsystem gilt beispielsweise bei der Darstellung natürlicher Zahlen:

- Der Stellenwert der ersten Stelle von rechts („Einerstelle") ist $10^0 = 1$.
- Der Stellenwert der zweiten Stelle von rechts („Zehnerstelle") ist $10^1 = 10$.
- Der Stellenwert der dritten Stelle von rechts („Hunderterstelle") ist $10^2 = 100$, und so weiter.

Es erweist sich hierbei als vorteilhaft, die Stellen nicht ab Eins, sondern ab Null zu nummerieren. Auf diese Weise hat dann die i-te Stelle gerade den Stellenwert b^i. Bei der Darstellung rationaler Zahlen werden auch negative Exponenten zugelassen.

Darstellungen verschiedener Zahlenarten

Darstellung natürlicher Zahlen

Natürliche Zahlen werden in der b-adischen Darstellung durch eine endliche Folge von Ziffern in der Form

$$\mathbf{a}_n \ldots \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_0$$

dargestellt. Dieser Ziffernfolge wird nun die Zahl Z

$$Z = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot b^i = a_0 \cdot b^0 + a_1 \cdot b^1 + a_2 \cdot b^2 + \cdots + a_n \cdot b^n$$

zugeordnet, wobei a_i der der Ziffer $\mathbf{a}_i$ zugewiesene Ziffernwert ist.

Es lässt sich zeigen, dass zu jeder natürlichen Zahl Z eine Folge von Ziffern existiert, deren zugeordneter Wert Z ist. Im Allgemeinen gibt es sogar mehrere Folgen. Es genügt dazu, beliebig oft die Ziffer **0** = 0 auf höherwertigen Stellen voranzustellen. Werden Folgen mit führender **0** verboten, so lässt sich zeigen, dass diese Zuordnung sogar eineindeutig ist, das heißt zu jeder natürlichen Zahl Z existiert genau eine Folge, deren zugeordneter Wert Z ist. Als Ausnahme von diesem Verbot wird der Zahl 0 nicht die leere Folge (also die Folge ohne ein einziges Glied) zugeordnet, sondern die Folge mit genau einer Ziffer, und zwar der, welcher der Wert 0 zugeordnet wird (also **0**), um diese Zahl typografisch erkennbar zu machen.

Als Beispiel für die angegebene Zahlendarstellung betrachten wir die Ziffernfolge **694** im Dezimalsystem ($\boldsymbol{b} = \mathbf{10}$). Sie steht für:

$$4 \cdot 10^0 + 9 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^2 = 694.$$

Die Ziffernfolge **2B6** im Hexadezimalsystem ($\boldsymbol{b} = \mathbf{16}$) steht für $a_0 + a_1 \cdot b + a_2 \cdot b^2$ mit a_0 = **6** = 6; a_1 = **B** = 11; a_2 = **2** = 2.

Also hat die Folge **2B6** den Wert der Dezimalzahl

$$6 + 11 \cdot 16 + 2 \cdot 16^2 = 6 + 176 + 512 = 694.$$

Entsprechend hat die Ziffernfolge **1010110110** im Dualsystem ($\boldsymbol{b} = \mathbf{2}$) den Wert der Dezimalzahl

$$0 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^7 + 0 \cdot 2^8 + 1 \cdot 2^9 = 2 + 4 + 16 + 32 + 128 + 512 = 694.$$

Darstellung ganzer Zahlen

In einem System bestehend aus positiver Basis und rein nicht-negativem Ziffernvorrat lassen sich negative Zahlen nicht darstellen. Solchen Systemen wird ein Minuszeichen („**-**") beigefügt, das den Zahlkonstanten ggf. vorangestellt wird. Dies geht mit einem geringen Verlust an Eineindeutigkeit einher, da die Zahl 0 als vorzeichenbehaftete Null in der Form +0, –0 oder auch ±0 geschrieben werden kann. Darstellungen von Zahlen verschieden von 0, denen kein Minuszeichen vorangestellt wird, werden als positive Zahlen interpretiert. Manchmal möchte man diese Positivität jedoch besonders hervorheben (bspw., wenn die Zahl als Inkrement kenntlich gemacht werden soll). In solchen Fällen wird in der Darstellung ein Pluszeichen („**+**") vorangestellt.

Darstellung rationaler Zahlen

Die Notation wird in die negativen Exponenten der Basis erweitert, indem man die entsprechenden Stellen rechts von einem zu diesem Zweck angefügten Trennzeichen in lückenloser Folge anschließt. Im deutschsprachigen Raum (ausgenommen Schweiz) ist hierfür das Komma »**,**«, im englischsprachigen Raum dagegen der Punkt »**.**« gebräuchlich. Die Werte der Ziffern hinter dem Trennzeichen werden mit b^{-i} multipliziert, wobei i die Position hinter dem Komma angibt. Zum Beispiel wird die rationale Zahl 1+3/8 = 1,375 im 2-adischen Stellenwertsystem durch die Ziffernfolge **1,011** dargestellt. In der Tat ist

$$1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3} = 1 + 0/2 + 1/4 + 1/8 = 1 + 3/8.$$

Nach der Hinzufügung des Trennzeichens lassen sich viele rationale Zahlen b-adisch darstellen, jedoch keineswegs alle, denn es kann vorkommen, dass zur Darstellung eine unendliche Folge von Nachkommastellen benötigt wird, die dann aber periodisch ist. Gewöhnlich wird diese **Periode** durch eine über die sich wiederholenden Ziffern gezogene Linie gekennzeichnet und so sie Länge der Periode markiert und eine (endliche) Aufschreibung ohne Pünktchen möglich.

Während die Zahl 1/5 = 0,2 im Dezimalsystem die endliche Ziffernfolge **0,2** hat, ist ihre Darstellung im Dualsystem periodisch:

$$\mathbf{0{,}00110011\ldots}_2 = \mathbf{0{,}\overline{0011}}_2.$$

Dagegen bedeutet die Ziffernfolge **0,1** im 3-adischen (ternären) System die rationale Zahl $1 \cdot 3^{-1}$ = 1/3, die im Dezimalsystem einer unendlichen periodischen Ziffernfolge **0,333...** = $\mathbf{0{,}\overline{3}}_{\mathrm{dez}}$ entspricht.

Allgemein gilt, dass ein Bruch genau dann eine endliche b-adische Darstellung hat, wenn nach dem Kürzen alle Primfaktoren seines Nenners auch Primfaktoren von $b =: p_1^{\nu_1} \cdots p_k^{\nu_k}$ (bei $p_1, \ldots, p_k \in \mathbb{P}$ und $\nu_1, \ldots, \nu_k \in \mathbb{N}$) sind. (Für eine endliche Darstellung im Dezimalsystem muss der gekürzte Nenner also ein Produkt der Zahlen Zwei und Fünf sein. Genau dann ist der Bruch ein Dezimalbruch im engeren Sinne oder wird durch Erweitern zu einem solchen.)

Die endlichen Darstellungen bilden den Ring

$$\mathbb{Z}_S := \{x \in \mathbb{Q} \mid \exists i \in \mathbb{N}_0 : xb^i \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}b^{\mathbb{Z}},$$

wobei $S := \{p_1, \ldots, p_k\} \subset \mathbb{P}$ für die Menge der Primfaktoren von b steht. Bei diesen rationalen Zahlen hat in einer vollständig gekürzten Bruchdarstellung der Nenner **nur** Primteiler $p_i \in S$. Für jedes nichtleere S liegt der Unterring $\mathbb{Z}_S$ von $\mathbb{Q}$ (wie $\mathbb{Q}$ selbst) dicht sowohl in $\mathbb{Q}$ wie in $\mathbb{R}$, d. h. eine jede reelle Zahl lässt sich beliebig genau durch Zahlen aus $\mathbb{Z}_S$ approximieren.[6]

Betrachtet man nur Darstellungen endlicher Länge, dann bezeichnen schon die Ziffernfolgen **1**, **1,0**, **1,000** im Dezimalsystem allesamt dieselbe rationale Zahl 1 (ganz zu schweigen von den Darstellungen **01**, **0001** mit führenden Nullen). Diese Uneindeutigkeiten lassen sich durch Verbote führender und nachklappender Nullen noch unterdrücken. Gehören jedoch die unendlichen Darstellungen von Anfang an zum System, dann kommen die nicht-abbrechende Darstellung **1,000...** = $\mathbf{1{,}\overline{0}}$ und darüber hinaus die ganz anders aussehende Darstellung **0,999...** = $\mathbf{0{,}\overline{9}}$ (alle mit dem Wert 1) hinzu, siehe dazu den Artikel 0,999….[7]

Normalerweise sind Missverständnisse nicht zu befürchten, so dass man beide Darstellungen zulassen kann. Eindeutigkeit ist jedoch z. B. bei der Z-Kurve gefordert, die $Z : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$ injektiv abbildet und bei der zwei b-Ziffernfolgen alternierend in eine gepresst werden. Die Unstetigkeitsstellen der Funktion Z sind übrigens genau die Argumente, die eine endliche b-adische Darstellung haben.[8]

Die b-adische Darstellung eines gekürzten Bruchs $q =: z/(m \cdot n)$ mit $z \in \mathbb{Z}, m = p_1^{\mu_1} \cdots p_k^{\mu_k}$ und $n \in \mathbb{N}$ teilerfremd zur Basis b hat für $n = 1$ die Periodenlänge 0, ist also endlich. Andernfalls ist b ein Element der primen Restklasse $[b] \in \mathbb{Z}_n^*$, so dass $b^{\varphi(n)} \equiv 1 \bmod n$ ist (mit φ als der eulerschen φ-Funktion). Die b-adische Periodenlänge des gekürzten Bruchs q ist dann der kleinste Exponent $\operatorname{ord}_n(b) := e > 0$, für den n ein Teiler von $b^e - 1$ ist. (S. a. den Artikel Rationale Zahl#Dezimalbruchentwicklung.)

Darstellung reeller Zahlen

Die Darstellung reeller Zahlen erfolgt prinzipiell genauso wie die von rationalen Zahlen durch b-adische Entwicklung. Bei rationalen Zahlen liefert diese eine abbrechende oder eine unendliche periodische Ziffernfolge.

Die b-adische Entwicklung einer irrationalen Zahl (wie π oder $\sqrt{2}$) liefert dagegen stets eine unendliche nichtperiodische Ziffernfolge. Durch Verlängerung des Nachkommaanteils ist eine beliebig genaue Annäherung an die irrationale Zahl möglich.

Wie bei den rationalen Zahlen mit unendlich periodischer Ziffernfolge ist eine endliche Darstellung für irrationale Zahlen durch Einführung neuer Symbole möglich, so wie dies hier für die Beispiele π und $\sqrt{2}$ geschehen ist.

Trotzdem kann selbst mit beliebig, aber endlich vielen zusätzlichen Zeichen nicht jede reelle Zahl als endliche Zeichenfolge dargestellt werden. Dies liegt daran, dass die Menge der reellen Zahlen überabzählbar, die Menge aller endlichen Darstellungen mit endlichem Zeichenvorrat aber nur abzählbar ist.[9]

Wenn aber unter der „Darstellung“ einer reellen Zahl die bei der b-adischen Entwicklung entstehende Ziffernfolge verstanden wird, dann ist jede reelle Zahl als (ggf. unendlicher) b-adischer Bruch darstellbar, auch wenn nicht jeder solche Bruch tatsächlich aufschreibbar ist.

Formeln

Berechnung eines Ziffernwertes

Die letzte Ziffer der b-adischen Darstellung einer natürlichen Zahl n ist der Rest von n bei Division durch b. Dieser Rest ist auch durch den Ausdruck

$$n - b\left\lfloor \frac{n}{b} \right\rfloor$$

gegeben; dabei bezeichnet $\lfloor\cdot\rfloor$ die Gaußklammer. Allgemeiner ist die durch die letzten k Ziffern von n gebildete Zahl der Rest von n bei Division durch b^k.

Die Ziffer z_k an der k-ten Stelle (von rechts an der *Einerstelle* mit null beginnend gezählt) einer positiven reellen Zahl x ist

$$z_k = \left\lfloor \frac{x}{b^k} \right\rfloor - b\left\lfloor \frac{x}{b^{k+1}} \right\rfloor.$$

Dabei ist $z_k \in \{0, 1, \dots, b-1\}$ ein Element des Standardziffernvorrats. Nimmt man hinzu negative k, für die sich die entsprechende (negative) Nachkommastelle ergibt, dann hat man

$$x = \sum_{k=-n}^{\infty} z_{-k} b^{-k}$$

mit hinreichend großem $n := \lfloor \log_b(x) \rfloor$.

Algorithmus für rationale Zahlen

Für rationales $0 < x = p/q < 1$ lässt sich die obige Formel in den folgenden Algorithmus einbetten:

```
function b_adic(b,p,q) // b ≥ 2; 0 < p < q
  static Ziffernvorrat = "0123..."; // bis zum Zeichen mit dem Wert b–1
begin
  s = "";   // die zu bildende Zeichenkette
  pos = –1; // hier sind alle Stellen rechts vom Komma
  while not defined(occurs[p]) do
    occurs[p] = pos;  // die Nummer der Stelle mit dem Rest p
    z = floor(b*p/q); // Index z der Ziffer im Vorrat: 0 ≤ z ≤ b-1
    p = p*b − z*q;    // 0 ≤ p < q
    s = s.substring(Ziffernvorrat, z, 1);
          // Ziffer aus dem Ziffernvorrat dranhängen
    pos -= 1;
  end while
  pl = occurs[p]-pos; // die Periodenlänge (sie ist < q)
  // Markiere die Ziffern der Periode mit einem Überstrich:
  for i from -occurs[key] to -pos-1 do
    substring(s, i, 1) = overline(substring(s, i, 1));
  end for
  return (s);
end function
```

Die gelb hervorgehobene Zeile entspricht der Ziffernberechnung des vorigen Abschnitts. Die darauf folgende Zeile in orange berechnet den neuen Rest p' der Division modulo des Nenners q. (Die Gaußklammer `floor` bedeutet, dass

$$bp/q - 1 \quad < \quad z = \lfloor bp/q \rfloor \quad \leq \quad bp/q.$$

Daraus folgt $bp - q < zq$, also $p' := bp - zq < q$, und $zq \leq bp$, also $0 \leq bp - zq =: p'$.) Da alle diese Reste p ganzzahlig nicht-negativ und kleiner als q sind, kann es nur endlich viele verschiedene von ihnen geben. Das hat zur Folge, dass sich die Reste in der `while`-Schleife wiederholen müssen (genauer: dass nicht jeder Rest nicht wiederkehrt). Die Wiederkehr eines Restes p wird mit Hilfe des assoziativen Datenfeldes `occurs` festgestellt.

Die neue Ziffer z wird in der gelben Zeile gebildet, in der p die einzige Nicht-Konstante ist. Die Periode der Ziffern hat also dieselbe Länge wie die der Reste. (Genaueres zur Periodenlänge s. oben.)

Berechnung der Stellenzahl

Die Anzahl a der Ziffern der b-adischen Darstellung einer natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}_0$ ist

$$a = \begin{cases} 1, & \text{wenn } n = 0, \\ \lfloor \log_b n \rfloor + 1, & \text{wenn } n \geq 1. \end{cases}$$

Hinzufügen einer Ziffer

- Hängt man an die b-adische Darstellung einer Zahl n ganz rechts eine Ziffer z an, so erhält man die b-adische Darstellung der Zahl $n \cdot b + z$.
- Stellt man die Ziffer z hingegen ganz links n voran, so erhält man die b-adische Darstellung der Zahl $z \cdot b^a + n$, wobei a wie oben angegeben die Anzahl der Ziffern von n ist.

Gebräuchliche Basen

- Das bekannteste und verbreitetste Stellenwertsystem ist das Dezimalsystem (Zehner-System) mit Basis 10 und den Ziffern **0** bis **9**. Das Dezimalsystem stammt ursprünglich aus Indien. Der persische Mathematiker Muhammad ibn Musa al-Chwarizmi verwendete es in seinem Arithmetikbuch, das er im 8. Jahrhundert schrieb. Bereits im 10. Jahrhundert wurde das System in Europa eingeführt, damals noch ohne Null. Durchsetzen konnte es sich jedoch erst im 12. Jahrhundert mit der Übersetzung des genannten Arithmetikbuchs ins Lateinische. Zur Speicherung von Dezimalziffern im Computer dient der BCD-Code.
- Im 17. Jahrhundert führte der Mathematiker Gottfried Wilhelm Leibniz mit der Dyadik das Dualsystem (binäres Zahlensystem) ein, also das Stellenwertsystem mit der Basis 2 und den Ziffern **0** und **1**. Dieses wird vor allem in der Informationstechnik verwendet, da deren Logik allein auf Bits, welche entweder wahr oder falsch bzw. 1 oder 0 sind, ausgerichtet ist.
- Da Binärdarstellungen großer Zahlen unübersichtlich lang sind, wird an ihrer Stelle oft das Hexadezimal- oder Sedezimalsystem verwendet, das mit der Basis 16 (und den Ziffern **0**, **1**, …, **9**, **A**, **B**, …, **F**) arbeitet. Hexadezimale und binäre Darstellung lassen sich leicht ineinander umwandeln, da 4 Stellen (= 1 Nibble) einer binären Zahl gerade einer Stelle einer hexadezimalen Zahl entsprechen.
- In der Computertechnik wird neben dem Binär- und Hexadezimalsystem auch das Oktalsystem zur Basis 8 (Ziffern **0** bis **7**, drei Binärstellen = eine Oktalstelle) verwendet. Diese Verwendung nimmt aber immer mehr ab, da sich die heute üblichen Wortlängen von acht Bit nicht in eine ganze Anzahl von Stellen im Oktalsystem umwandeln lassen.
- Ebenfalls Verwendung findet die Basis 64 bei Base64 (mit ungewohnter Symbolreihenfolge); die Basis 62 bei Base62 mit den Ziffern **0** bis **9**, **A** bis **Z** und **a** bis **z**; sowie gelegentlich die Basis 32 mit den Ziffern **0** bis **9** und **a** bis **v** unter der Bezeichnung Radix32.
- Ab ca. 1100 v. Chr. wurden im indo-chinesischen Raum Rechentafeln Abakus (Rechentafel) benutzt, denen ein Unärsystem zugrunde liegt. Aber siehe oben zum Unärsystem in Fünfer-Blöcken, das allerdings ein Additionssystem darstellt.
- Das Vigesimalsystem verwendet 20 als Basis. Es dürfte entstanden sein, weil zum Zählen neben den Fingern auch die Zehen benutzt wurden, und war u. a. in fast allen mesoamerikanischen Kulturen gebräuchlich. Das am weitesten entwickelte System dieser Art wurde von den Maya in der Klassischen Periode für astronomische Berechnungen sowie zur Darstellung von Kalenderdaten verwendet. Es handelte sich um ein Stellenwertsystem »mit einem Sprung«, weil an der zweiten Stelle nur die Ziffern von **1** bis **18** auftreten, um so als dritten Stellenwert 360 (annähernde Länge des Sonnenjahres) zu erreichen. Die Maya kannten die Null und benutzten sie auch in ihren Kalendern.
- Die Indianer Südamerikas verwendeten Zahlensysteme zur Basis 4, 8 oder 16, da sie mit Händen und Füßen rechneten, jedoch die Daumen dabei nicht einbezogen.
- Das Duodezimalsystem hat als Basis die 12. Wir finden es in der Rechnung mit Dutzend und Gros und im angelsächsischen Maßsystem (1 Shilling = 12 Pence) (siehe auch Alte Maße und Gewichte). Auch die Stundenzählung hat in diesem System ihren Ursprung. In vielen polytheistischen Religionen gab es 12 Hauptgötter, die sich z. B. im alten Ägypten in drei oberste Götter und 3 × 3 zugeordnete Götter aufteilten. (Die Drei galt als perfekte Zahl; siehe auch Dreifaltigkeit).
- Die Babylonier benutzten ein Zahlensystem mit der Basis 60 (Sexagesimalsystem; siehe auch Geschichte von Maßen und Gewichten).
- Ein eventuell zu erwartendes Zahlensystem zur Basis fünf bei Völkern, die nur eine Hand zum Zählen benutzen, wurde bisher nicht entdeckt. In Bantusprachen sind die Namen der Zahlen 6, 7, 8 und 9 jedoch oft Fremdwörter oder als 5 + 1, 5 + 2, 5 + 3, 5 + 4 verstehbar, was auf ein Zahlensystem zur Basis 5 hinweist.

  Zum Beispiel:
  Swahili: 1 = moja, 2 = mbili, 3 = tatu, 4 = nne, 5 = tano, 6 = sita, 7 = saba, 8 = nane, 9 = kenda (Arabisch: 6 = sitta, 7 = saba'a)
  Tshitschewa: 1 = modzi, 2 = wiri, 3 = tatu, 4 = nai, 5 = sanu, 6 = sanu ndi-modzi, 7 = sanu ndi-wiri, 8 = sanu ndi-tatu, 9 = sanu ndi-nai

  Besonders ausgeprägt ist das Quinärsystem bei den südamerikanischen Betoya: 1 = tey, 2 = cayapa, 3 = tozumba, 4 = cajezea, 5 = teente, 10 = caya ente, 15 = tozumba-ente, 20 = caesea ente.[10]

- Das Senärsystem eignet sich zum Zählen bis fünfunddreißig mit 2 × 5 Fingern. Sprachliche Spuren eines solchen Systems sind sehr selten (beispielsweise Bretonisch 18 = *triouec'h*, etwa „3 6er“)[10]
- Die frühere Vermutung, die Maori benützten ein System zur Basis 11, gilt mittlerweile als überholt.[10] Einige Völker benutzen das System zur Basis 18.

Konvertierungen

Manchmal benötigt man Konvertierungen zwischen Stellenwertsystemen. Ist das Dezimalsystem nicht beteiligt, kann man es als Zwischenschritt verwenden. Die nachfolgenden Berechnungen können auch mit Hilfe eines Taschenrechners durchgeführt werden, bei dem in der Regel die Zahlenein- und -ausgabe nur im Dezimalsystem geschieht.

Insbesondere, wenn Zahlen von einem System in ein anderes zu konvertieren sind, ist es üblich und zweckmäßig, die Ziffernfolgen durch ein tiefgestelltes Suffix $_b$ der Basis b des verwendeten Zahlensystems zu kennzeichnen. Dabei steht ein fehlendes Suffix und das Suffix $_{10}$ standardmäßig für die konventionelle dezimale Darstellung, explizit auch $_{\text{dez}}$ oder $_{\text{dec}}$. Die Suffixe $_2$ oder $_\text{b}$ kennzeichnen binär und $_{16}$ oder $_\text{h}$ hexadezimal dargestellte Zahlen. Ferner wird als Ziffernvorrat der Standardsatz $\{0,1,\ldots,b-1\}$ angenommen. Gelegentlich wird die gekennzeichnete Ziffernfolge in eckige Klammern gesetzt.

Es gibt zwei wesentliche Varianten

- die iterierte euklidische Division, die bei den Stellen niedriger Signifikanz beginnt, und
- die Auswertung des Ziffern-Polynoms bspw. in einer Art des Horner-Schemas. Die kleinste Anzahl von Multiplikationen wird benötigt, wenn man bei der höchstwertigen Stelle beginnt.

Die Auswahl richtet sich am besten danach, welches Verfahren auf dem vorhandenen Kalkulator am einfachsten durchgeführt werden kann.

Beispiel 1: Umwandlung einer Darstellung zur Basis 10 in eine Darstellung zur Basis 12

Eine Zahl hat die dezimale Darstellung 4711. Gesucht ist ihre Darstellung im Zwölfersystem.

Um diese Darstellung zu erhalten, dividiert man die gegebene Darstellung schrittweise durch die neue Basis 12. Die verbleibenden Reste liefern die Darstellung zur Basis 12. Dabei entspricht der erste Rest dem niedrigsten Ziffernwert der gesuchten neuen Darstellung (in unserem Fall also der Stelle 12^0), der zweite Rest entspricht dem zweitniedrigsten Ziffernwert (also der Stelle 12^1) usw. Die zugehörige Rechnung dazu lautet demnach:

- 4711 geteilt durch 12 ergibt 392 Rest 7 (entspricht der Ziffer zur Stelle 12^0 im Ergebnis)
- 392 geteilt durch 12 ergibt 32 Rest 8 (entspricht der Ziffer zur Stelle 12^1 im Ergebnis)
- 32 geteilt durch 12 ergibt 2 Rest 8 (entspricht der Ziffer zur Stelle 12^2 im Ergebnis)
- 2 geteilt durch 12 ergibt 0 Rest 2 (entspricht der Ziffer zur Stelle 12^3 im Ergebnis)

Als Duodezimaldarstellung der gegebenen Zahl erhalten wir somit 2887. Die Umwandlung in andere Stellenwertsysteme erfolgt analog.

Beispiel 2: Umwandlung einer Darstellung zur Basis 16 in eine Darstellung zur Basis 10

Bezüglich des Hexadezimalsystems mit den Ziffern 0, 1, ..., 9, A (Wert 10), B (Wert 11), C (Wert 12), D (Wert 13), E (Wert 14) und F (Wert 15) habe eine Zahl die Darstellung AFFE. Gesucht ist die Darstellung dieser Zahl im Zehnersystem.

Um diese Darstellung zu erhalten, multipliziert man die Ziffernwerte der gegebenen Darstellung mit den jeweiligen Stellenwerten und addiert die Ergebnisse auf. Die zugehörige Rechnung dazu lautet demnach:

- 10 (A) mal 16^3 ergibt 40960
- 15 (F) mal 16^2 ergibt 3840
- 15 (F) mal 16^1 ergibt 240
- 14 (E) mal 16^0 ergibt 14

Als Dezimaldarstellung der gegebenen Zahl erhalten wir somit $40960+3840+240+14=45054$. Die Umwandlung in andere Stellenwertsysteme erfolgt analog.

Beispiel 3: Nachkommastellen

Bezüglich des Zehnersystems habe eine Zahl die Darstellung 0,1. Gesucht ist die Darstellung dieser Zahl im Dualsystem.

Hierzu wird der Nachkommaanteil wiederholt mit der Basis des Zielsystems multipliziert. Tritt dabei ein Wert größer 1 auf, wird dessen ganzzahliger Anteil der Reihe der Nachkommastellen hinzugefügt, andernfalls wird eine 0 den Nachkommastellen hinzugefügt. Tritt eine ganze Zahl als Multiplikationsergebnis auf, ist der Nachkommabetrag vollständig bestimmt, oft wird jedoch auch eine Periode auftreten.

Die zugehörige Rechnung dazu lautet demnach:

- 0,1 mal 2 ergibt 0,2 , die erste Nachkommastelle ist also die 0
- 0,2 mal 2 ergibt 0,4 , die zweite Nachkommastelle ist also die 0
- 0,4 mal 2 ergibt 0,8 , die dritte Nachkommastelle ist also die 0
- 0,8 mal 2 ergibt 1,6 , die vierte Nachkommastelle ist also die 1
- 0,6 mal 2 ergibt 1,2 , die fünfte Nachkommastelle ist also die 1
- 0,2 mal 2 (muss nicht mehr ausgeführt werden, da eine Periode aufgetreten ist)

Als Ergebnis erhalten wird somit 0,0001100110011…

Balancierte Stellenwertsysteme

Besondere Stellenwertsysteme sind die balancierten. Sie haben immer eine ungerade Basis $b \in \mathbb{N}$ und verwenden sowohl natürliche als auch negative Ziffernwerte, nämlich die aus der Menge $\{-\frac{b-1}{2},\ldots,-1,0,1,\ldots,\frac{b-1}{2}\}$. Häufig werden die negativen Ziffern durch einen Unterstrich gekennzeichnet. So wird z. B. im balancierten Ternärsystem eine Zahl durch die Ziffern $\underline{\mathbf{1}}$, $\mathbf{0}$, und $\mathbf{1}$ dargestellt, welchen die Werte −1, 0 und 1 zugeordnet sind.

Ein balanciertes Stellenwertsystem hat folgende Eigenschaften:

- Das Negative einer Zahl erhält man durch Austausch einer jeden Ziffer mit ihrem inversen Gegenüber.
- Die erste von 0 verschiedene Stelle zeigt das Vorzeichen an. Das System kommt also ohne ein separates Vorzeichen aus.

- Eine Rundung zur nächsten ganzen Zahl geschieht durch einfaches Abschneiden beim Komma.

Die Darstellung der ganzen Zahlen ist eindeutig.

Es gibt aber rationale Zahlen, die nicht eindeutig darstellbar sind. Sei dazu $\mathbf{t} := \frac{b-1}{2}$ die größte Ziffer und $\underline{\mathbf{t}} := -\mathbf{t}$ die kleinste, dann ist bspw.

$$0{,}\overline{\mathbf{t}} \;=\; 1{,}\overline{\underline{\mathbf{t}}} \;=\; \frac{1}{2}.$$

Lexikographische Ordnung

Bei positiver Basis $b \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ hängt die übliche Ordnungsrelation der reellen Zahlen eng zusammen mit der lexikographischen Ordnung der diese Zahlen darstellenden b-adischen Zeichenketten. Genauer:

- Es gibt einen Ordnungshomomorphismus (eine ordnungserhaltende Abbildung) ω, der die beliebig (auch unendlich) langen Zeichenketten auf b-adische Weise in ein reelles Intervall abbildet.
- Für *kein* b-adisches System ist ω injektiv.[11]
- Welche reellen Zahlen mehrere Darstellungen (mehrere Urbilder) haben, hängt von den Ziffernwerten des zugehörigen Ziffernsystems Σ ab. Ihre Menge ist eine Teilmenge der rationalen Zahlen, hat also abzählbare Mächtigkeit. Sie liegt dicht im Bildintervall.[12]

Herleitung [Ausklappen]

Verallgemeinerungen

Zahlensysteme mit gemischten Basen

Eine naheliegende Verallgemeinerung ist, verschiedene Basen für die verschiedenen Ziffernpositionen zu wählen. Man spricht dann von Zahlensystemen mit gemischten Basen. Ein paar interessante Beispiele sind:

- alternierend *a* oder *b*, wobei *a* und *b* zwei verschiedene natürliche Zahlen > 1 sind[13]
- 2 oder 3 aber in der Reihenfolge, so dass e^k am „relativ engsten“ approximiert wird mit dem Produkt der ersten *k* Basen
- als Basis werden die natürlichen Zahlen > 1 der Reihe nach genutzt („Fakultätsbasis“)
- die Primzahlen der Reihe nach oder die (sich dann wiederholenden) Primzahlen die mit jeder nächstgrößeren Primzahlpotenz auftreten (s. a. Darstellung der proendlichen Zahlen mit mehreren Basen)

In den beiden letzten Fällen hat man im Prinzip unendlich viele verschiedene Ziffernsymbole bereitzustellen.[14]

Datumsformat als Zahlensystem mit gemischten Basen

→ *Hauptartikel: Datumsformat*

Auch die Darstellung von Datum und Uhrzeit hat traditionell mehrere Basen und Ziffernsysteme. Im hiesigen Kontext sei als einziges Exempel die folgende im angelsächsischen Sprachraum gebräuchliche Darstellung

[1-12] [1–31] [0–9][2,4,*] [1-12] [am,pm] [0–59] [0–59] [0–9][*]

angeführt, bei der zudem die Reihenfolge von Jahr-, Monat- und Tagangaben einerseits sowie Halbtag und Stunde andererseits entgegen der Rangfolge vertauscht sind.[15] Hier finden also die Basen 2, 10, 12, 28–31 und 60 Verwendung. Insbesondere ist bemerkenswert, dass sich die Basis der Tagesstelle nach dem Wert der Monatsstelle richtet.

Nicht-natürliche Zahlen als Basis

Die Basis b muss nicht notwendigerweise eine natürliche Zahl sein. Sämtliche (auch komplexe) Zahlen mit Betrag größer 1 können als Basis eines Stellenwertsystems verwendet werden.

Negative Basen

Stellenwertsysteme mit negativen Basen $b \in \mathbb{Z}$ mit $b \leq -2$ kooperieren mit denselben Ziffernvorräten wie ihre positiven Entsprechungen $-b \in \mathbb{N}$ und $r := |b|$ wird oft als *Radix* bezeichnet. Sie werden häufig mit der Vorsilbe *nega-* gekennzeichnet, bspw. das *negadezimal*e, *negabinär*e, *negaternär*e usw. Stellenwertsystem.

Diese Stellenwertsysteme kommen ohne ein extra Vorzeichen aus. Andererseits benötigen die Darstellungen häufig eine Ziffer mehr als im entsprechenden System mit positiver Basis. Ferner sind die arithmetischen Operationen, insbesondere der arithmetische Vergleich und die Bildung des Absolutbetrags, etwas komplexer.

Ist der Ziffernvorrat minimal, bspw. $\{0, 1, \ldots, -b{-}1\}$, dann sind alle ganzen Zahlen eindeutig darstellbar. Wie bei den positiven Basen gibt es rationale Zahlen, die nicht eindeutig darstellbar sind. Sei dazu

$$T := 0{,}\overline{01}_b = \sum_{i=1}^{\infty} b^{-2i} = \frac{1}{b^2 - 1}$$

und $\mathbf{t} := -b{-}1$ die größte Ziffer, dann ist sowohl

$$0{,}\overline{0\mathbf{t}}_b = \mathbf{t}T = \frac{-b-1}{b^2-1} = \frac{1}{-b+1}$$

als auch

$$1{,}\overline{\mathbf{t}0}_b = 1 + \mathbf{t}bT = \frac{(b^2-1)+(-b-1)b}{b^2-1} = \frac{1}{-b+1}.$$

Einige arithmetische Operationen bringt der englischsprachige Artikel.

Irrationale Basen

Will man alle reellen Zahlen darstellen, dann muss bei nicht-ganzzahliger oder irrationaler Basis $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ die Minimalgröße des Ziffernsystems $\lceil |b| \rceil$ (Betragsstriche und Gaußklammern) sein. Für solche verallgemeinerten Stellenwertsysteme gelten einige der hier gemachten Aussagen über die endliche Darstellbarkeit rationaler Zahlen nicht.

Wird zum Beispiel der Goldene Schnitt $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ als Basis und $\{0,1\}$ als Ziffernvorrat verwendet, dann stellt eine endliche Ziffernfolge stets eine ganze Zahl oder eine irrationale Zahl der Form $s + t \cdot \sqrt{5}$ mit rationalen s, t dar. Trotzdem hat nicht jede solche Zahl eine endliche Darstellung.

Eine ebenfalls auf dem Goldenen Schnitt basierende Darstellung ist die Zeckendorf-Darstellung, bei der allerdings nicht die Potenzen von Φ, sondern die Fibonacci-Zahlen als Stellenwerte genommen werden.

Nicht-reelle Basen

Das erste Zahlsystem, das eine komplexe Zahl *nicht* als zwei separate Ziffernfolgen – je eine für Real- und eine für Imaginärteil – darstellt, sondern eine komplexe Zahl als *eine einzige* Ziffernfolge, war das von D. Knuth 1955 vorgeschlagene „quater-imaginäre" System[16]. Es hat $\mathbf{2i}$ als Basis und $\mathbf{0}$, $\mathbf{1}$, $\mathbf{2}$, $\mathbf{3}$ als Ziffern. Dort ist bspw. $-\mathbf{1} = \mathbf{103}_{\mathbf{2i}}$ und $\mathbf{i} = \mathbf{10{,}2}_{\mathbf{2i}}$. Siehe auch den englischsprachigen Artikel en:Quater-imaginary base.

Ein anderes System wurde 1964 von S. Khmelnik vorgeschlagen und für Digitalmaschinerie ausgearbeitet.[17] Es hat $\mathbf{i}-\mathbf{1}$ als Basis und $\mathbf{0}$, $\mathbf{1}$ als Ziffern. Bspw. ist $-\mathbf{1} = \mathbf{11101}_{\mathbf{i}-\mathbf{1}}$ und $\mathbf{i} = \mathbf{11}_{\mathbf{i}-\mathbf{1}}$. Siehe auch den englischsprachigen Artikel en:Complex base systems.

p-adische Zahlen

→ *Hauptartikel: p-adische Zahl*

Die hier vorgestellten Stellenwertsysteme beruhen auf der Konvergenz in Bezug auf die Metrik des gewöhnlichen archimedischen Absolutbetrags. Die unendlichen Reihen – die hier immer, und zwar „rechts" bei den kleinen Potenzen der Basis (Exponenten $\searrow -\infty$), konvergieren – sind dann reelle (oder komplexe) Zahlen. Es gibt aber für die rationalen Zahlen auch Metriken, die auf nichtarchimedischen Betragsfunktionen basieren und eine ganz ähnliche Notation mit Basis und Ziffernvorrat gestatten. Die unendlichen Reihen – die auch dort immer, und zwar der Konvention nach „links" bei den großen Potenzen (Exponenten $\nearrow +\infty$), konvergieren – sind *p*-adische Zahlen.

Zwar stimmen *endliche* p-adische Ausdrücke mit derselben Ziffernfolge in (dann ebenfalls endlicher) $p =: b$-adischer Darstellung überein, es gibt aber gravierende Unterschiede zu den ansonsten hier vorgestellten (archimedischen) Systemen. Die wichtigsten sind:

1. Die p-adischen Darstellungen sind *immer* (umkehrbar) eindeutig.
2. Ein Vorzeichen wird nicht benötigt. Die Darstellung von -1 als unendliche Summe ist $-1 = \sum_{i=0}^{\infty}(p-1)\cdot p^i$.
3. Ein p-adischer Ring kann nicht angeordnet werden.
4. Ist p zerlegbar, also keine Primzahl, dann enthält der p-adische Ring $\mathbb{Z}_p$ Nullteiler (die allesamt *nicht*-abbrechende Darstellungen haben). Einzelheiten in Proendliche Zahl#10-adische Zahlen.
5. Die *nicht*-abbrechenden Reihen stellen in beiden Systemen Zahlobjekte mit völlig verschiedenen arithmetischen Eigenschaften dar. Die periodischen unter ihnen stellen in beiden Systemen rationale Zahlen dar.
6. Alle Algorithmen für die Grundrechenarten beginnen rechts bei den kleinen Exponenten (möglicherweise negativ, aber $> -\infty$) und laufen wie die Potenzen und Überträge in die gleiche Richtung nach links zu den großen Exponenten. Wenn die Rechnung abgebrochen wird, kann sofort die Größe des Fehlers angegeben werden.

Weiterführende Texte

Der Artikel Teilbarkeit erläutert, wie in der Darstellung von Stellenwertsystemen in bestimmten Fällen erkannt werden kann, ob eine Zahl Teiler einer anderen ist. Die Cantorsche Normalform verallgemeinert die Darstellung von Zahlen im Stellenwertsystem auf Ordinalzahlen.

Ein Beispiel zur Anwendung zeigt die Berlin-Uhr.

Literatur

- Donald Knuth: *The Art of Computer Programming*. 3. Auflage. Band 2. Addison-Wesley, Boston 1998, ISBN 0-201-89684-2, Positional Number Systems, S. 194–213 (englisch).

Weblinks

Wiktionary: Stellenwertsystem – Bedeutungserklärungen, Wortherkunft, Synonyme, Übersetzungen

- Online-Umrechner (http://welt-zeit-uhr.de/zahlensysteme/index.php) für verschiedene Zahlensysteme (JavaScript)
- Umrechner für die Basen 2, 8, 10 und 16 (http://umwandlung.bjoernj.de/)

- "Opas" Stellenwertsystem des Tiroler Volksschullehrers Anton Haag (http://stellenwertsystem.hxg.at/)
- Video: *Stellenwertsysteme (Teil 1) (https://av.tib.eu/media/19902)*. Pädagogische Hochschule Heidelberg (PHHD) 2012, zur Verfügung gestellt von der Technischen Informationsbibliothek (TIB), doi:10.5446/19902 (https://doi.org/10.5446/19902).
- Video: *Stellenwertsysteme (Teil 2) (https://av.tib.eu/media/19903)*. Pädagogische Hochschule Heidelberg (PHHD) 2012, zur Verfügung gestellt von der Technischen Informationsbibliothek (TIB), doi:10.5446/19903 (https://doi.org/10.5446/19903).

Einzelnachweise und Anmerkungen

1. Der Fall $b = 1$ bedeutet einen nur aus einem einzigen Element bestehenden Ziffernvorrat, so dass als Unterscheidungsmerkmal zwischen zwei Darstellungen nur ihre Länge in Frage kommt. Das führt im besten Fall zum Unärsystem, einem nicht so mächtigen Darstellungssystem, welches nicht als Stellenwertsystem gilt, da die Wertigkeit einer Ziffer unabhängig von ihrer Position immer gleich ist.
2. DIN 1333, Kap. 8
3. DIN 1333, *Zahlenangaben*, 1992, Kap. 10.1
4. Interessant sind auch Ziffernsysteme mit negativen Ziffernwerten, insbesondere die balancierten Stellenwertsysteme. Eher exotisch sind die Systeme von David W. Matula (zitiert nach #Knuth1 S. 210f).
   Alle enthalten jedoch die Null, da sonst die Null selbst nicht darstellbar ist und eine abgebrochene Darstellung sich um mehr als den kleinsten Stellenwert von der genauen Zahl unterscheidet.
5. Eine solche Notation mit von links nach rechts absteigender Wertigkeit ist in der Datenverarbeitung im Format Big-Endian beibehalten worden.
6. Im Fall $S = \{p\}$ für ein $p \in \mathbb{P}$ ist $\mathbb{Z}_{\{p\}}$ nicht mit dem diskreten Bewertungsring $\mathbb{Z}_{(p)} = \mathbb{Z}_{S'}$ mit $S' := \mathbb{P} \setminus \{p\}$ zu verwechseln, der auch dicht liegt in $\mathbb{Q}$, dessen eingeprägte Bewertung aber zur völlig anderen Vervollständigung, nämlich den *p*-adischen Zahlen $\mathbb{Z}_p$ führt.
7. Dieses Phänomen tritt bei jeder Basis $b \in \ \mathbb{Z} \setminus \{-1, 0, 1\}$ und jedem „vernünftigen“ Ziffernsystem auf. Für $b > 0$ siehe den Abschnitt #Lexikographische Ordnung, für $b < 0$ den Abschnitt #Negative Basen, jeweils mit Beispielen für Zahlen mit mehrfacher Darstellung.
8. Ganz ähnlich verhält es sich bei der Hilbert-Kurve.
9. Ihr Maß ist 0 und damit auch der Zahlen mit mehrfacher Darstellung.
10. Levi Leonard Conant: *The Number Concept*. (http://www.gutenberg.org/etext/16449) Etext, Project Gutenberg (englisch)
11. Gleichwohl injektiv, wenn eingeschränkt auf die kleenesche Hülle Σ^* (Zeichenketten endlicher Länge).
12. Petkovšek p. 408
13. Wie oben bei den Zweierpotenzen kann eine solche Darstellung als „Sonderfall“ einer *ab*-adischen aufgefasst werden.
14. Ist jeder Position eine eigene Ziffer (oder mehrere) zugeordnet, hat man im Ergebnis ein Additionssystem.
15. An Zyklen der realen Welt angelehnt sind dabei nur Tag, Monat und Jahr (deren Inkommensurabilität mit einem beträchtlichen organisatorischen Aufwand (z. B. durch Einführung eines Schaltjahres) aufgefangen wird). Alle anderen Eigenwilligkeiten der Darstellung sind menschliche, mit einer außerordentlichen Beständigkeit behaftete Artefakte.
16. Donald Knuth: *An imaginary number system*. In: *Communications of the ACM*. 3, Nr. 4, April 1960.
17. S.I. Khmelnik: *Specialized digital computer for operations with complex numbers*. In: *Questions of Radio Electronics (in Russian)*. XII, Nr. 2, 1964.